SESSION 1986

MATHÉMATIQUES

(Options T et TA)

Épreuve n° 1 (exercices)

Durée : 4 heures

Aucun document n'est autorisé.

Les cinq exercices proposés sont indépendants.

L'importance accordée à l'ensemble des trois premiers exercices est sensiblement la même que celle qui est accordée à l'ensemble des deux derniers.

EXERCICE I

$\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

E est l'espace vectoriel associé.

1°) Soit Φ la forme quadratique sur E définie par : $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \longmapsto \Phi(\vec{V}) = x^2 - 2yz$

Ecrire la matrice Q de Φ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Calculer les valeurs propres de Q. Déterminer une matrice orthogonale P telle que $P^{-1} Q P$ soit diagonale.

2°) Soit $C = \{M \in \mathcal{E} \mid \Phi(\vec{OM}) = 0\}$

Montrer que C est un cône de révolution de sommet O.

Déterminer son axe de révolution et son demi-angle au sommet.

EXERCICE II

E est un espace affine euclidien orienté de dimension 3 rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la fonction vectorielle :

$t \in \mathbb{R} \longmapsto \vec{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

que l'on suppose deux fois dérivable.

Cette fonction vectorielle vérifie :

a) L'équation : $\dfrac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \vec{i} + \dfrac{d\vec{OM}}{dt} \wedge \vec{j}$

b) Les conditions : $\vec{OM}(0) = \dfrac{d\vec{OM}}{dt}(0) = \vec{0}$

1°) Déterminer x(t), y(t) et z(t)

2°) Soit γ l'ensemble des points M(t) quand t décrit $\mathbb{R}$.
On constate que γ est une courbe plane. Construire la courbe γ.
Comment pouvait-on prévoir, avant tout calcul, la tangente à γ pour $t = 0$?

EXERCICE III

Soit f et g les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$f(x) = \text{Arc sin}(\sin x)$ $\qquad$ $g(x) = \text{Arc cos}(\cos x)$

1°) Donner, en la justifiant, une représentation graphique des applications f et g.
Trouver une relation simple entre f et g.

Tournez la page S. V. P.

2°) Déterminer la série de Fourier de f. Cette série converge-t-elle simplement vers f ?

3°) Déduire la série de Fourier de g de celle de f.

4°) Les séries de Fourier de f et de g sont-elles uniformément convergentes sur $\mathbb{R}$?

EXERCICE IV

k désigne un paramètre réel.

Soit l'équation différentielle :

E(k) $\quad x^2y'' + xy' + k^2y = 0 \qquad$ avec $x \in]0, +\infty[$

1°) Intégrer E(k) pour $k = 0$

2°) Intégrer E(k) pour $k \neq 0$. On utilisera le changement de variable défini par $t = \ln x$.

3°) Montrer qu'il existe des valeurs du paramètre k pour lesquelles l'équation E(k) admet des solutions y, différentes de la solution nulle, telles que $y(1) = y(2) = 0$

Donner l'expression générale de ces solutions.

4°) Soient y_1 et y_2 deux solutions du type précédent, correspondant respectivement à des valeurs k_1 et k_2 distinctes du paramètre k.

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{y_1(x)\, y_2(x)}{x}\, dx$

EXERCICE V

α est un paramètre réel. On se propose d'étudier la convergence de l'intégrale :

$$\dot{I}(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^\alpha \sin(x^2)\, dx$$

1°) L'intégrale $\dot{I}(1)$ est-elle convergente ?

2°) Pour quelles valeurs de α l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \sin(x^2)\, dx$ est-elle convergente ?

3°) On suppose dans cette question $\alpha < 1$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha \sin(x^2)\, dx$ est-elle convergente ?

On pourra utiliser le changement de variable $t = x^2$ et une intégration par parties.

4°) On suppose dans cette question $\alpha > 1$

n désignant un entier positif on pose :

$$U_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{4}} \quad ; \quad V_n = \sqrt{2n\pi + \frac{3\pi}{4}}$$

$$W_n = \int_{U_n}^{V_n} x^\alpha \sin(x^2)\, dx$$

Etudier la limite de la suite W_n.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha \sin(x^2)\, dx$ est-elle convergente ?

5°) En conclusion, pour quelles valeurs de α l'intégrale $\dot{I}(\alpha)$ est-elle convergente ?